

Correction de la fiche 2 de calcul

Du calcul avec de vrais nombres

Exercice 1 — Quantité conjuguée

Pour simplifier la fraction $\frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$, on multiplie son numérateur et son dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\
 &= \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \quad \text{par identité remarquable} \\
 &= \frac{3 + 4\sqrt{5} + 5}{9 - 5} \\
 &= \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4} \\
 &= \frac{4(2 + \sqrt{5})}{4} \\
 &= \boxed{2 + \sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 — Comparaisons

Classons dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$\frac{7}{4} \quad ; \quad \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{3}{5} \quad ; \quad \frac{1}{24} \quad ; \quad 0,25 \quad ; \quad \frac{10^{-1}}{2} \quad ; \quad \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{7}{12} \quad ; \quad 9 \cdot 10^{-2} \quad ; \quad \frac{3}{2}.$$

- Tout d'abord, écrivons $0,25$, $\frac{10^{-1}}{2}$ et $9 \cdot 10^{-2}$ sous forme de fractions d'entiers :

$$\star \quad 0,25 = \frac{25}{100} = \boxed{\frac{1}{4}};$$

$$\star \quad \frac{10^{-1}}{2} = \frac{\frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{20}};$$

$$\star \quad 9 \cdot 10^{-2} = \boxed{\frac{9}{100}}.$$

- Comparons alors les fractions $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{20}$ en les réduisant au même dénominateur :

$$\star \quad \frac{1}{24} = \frac{1}{4 \times 6} = \frac{5}{4 \times 5 \times 6} = \frac{5}{120};$$

$$\star \quad \frac{10^{-1}}{2} = \frac{1}{20} = \frac{1}{4 \times 5} = \frac{6}{4 \times 5 \times 6} = \frac{6}{120}.$$

Or $\frac{5}{20} < \frac{6}{20}$, donc on a :

$$\boxed{\frac{1}{24} < \frac{10^{-1}}{2}}.$$

- Comparons ensuite $\frac{10^{-1}}{2}$ et $9 \cdot 10^{-2}$:

$$\star \frac{10^{-1}}{2} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100};$$

$$\star 9 \cdot 10^{-2} = 9 \times \frac{1}{100} = \frac{9}{100}.$$

Or $\frac{5}{100} < \frac{9}{100}$, donc on a :

$$\boxed{\frac{10^{-1}}{2} < 9 \cdot 10^{-2}}.$$

- Comparons ensuite $9 \cdot 10^{-2}$ et $0,25$:

$$\star 9 \cdot 10^{-2} = \frac{9}{100};$$

$$\star 0,25 = \frac{25}{100}.$$

Or $\frac{9}{100} < \frac{25}{100}$, donc on a :

$$\boxed{9 \cdot 10^{-2} < 0,25}.$$

- Comparons ensuite $0,25$ et $\frac{7}{12}$:

$$0,25 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} < \frac{7}{12},$$

donc on a

$$\boxed{0,25 < \frac{7}{12}}.$$

- Comparons ensuite $\frac{7}{12}$ et $\frac{3}{5}$:

$$\star \frac{7}{12} = \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{35}{60};$$

$$\star \frac{3}{5} = \frac{3 \times 12}{5 \times 12} = \frac{36}{60}.$$

Or $\frac{35}{60} < \frac{36}{60}$, donc on a :

$$\boxed{\frac{7}{12} < \frac{3}{5}}.$$

- Comparons ensuite $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$:

$$\star \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15};$$

$$\star \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}.$$

Or $\frac{9}{15} < \frac{10}{15}$, donc on a :

$$\boxed{\frac{3}{5} < \frac{2}{3}}.$$

- Remarquons à présent que

$$\boxed{\frac{2}{3} < 1 < \frac{3}{2}}.$$

- Comme $3 < \pi$, on a :

$$\boxed{\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}}.$$

- Enfin, comme $\pi < 3,5 = \frac{7}{2}$, on a :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \frac{7}{4}}.$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\frac{1}{24} < \frac{10^{-1}}{2} < 9 \cdot 10^{-2} < 0,25 < \frac{7}{12} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{7}{4}}.$$

Du calcul avec de vraies lettres

Exercice 3 — Simplification de fractions

- Donnons le domaine de définition de la fonction $a \mapsto \frac{a}{\frac{1}{a}}$.

★ La fonction $a \mapsto \frac{1}{a}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

★ Donc par quotient, la fonction $a \mapsto \frac{a}{\frac{1}{a}}$ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{a} \neq 0 \right\} = \{ a \in \mathbb{R}^* \mid 1 \neq 0 \} = \boxed{\mathbb{R}^*}.$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Alors on a :

$$\frac{a}{\frac{1}{a}} = a \times \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \times a = \boxed{a^2}.$$

2. Donnons le domaine de définition de la fonction $f: a \mapsto \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}}$, puis simplifions son expression.

- Trouvons tout d'abord le domaine de définition du dénominateur $g: a \mapsto \frac{1}{a} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}$.

★ La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction constante égale à 1 est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\text{la fonction } a \mapsto 1 - \frac{1}{a} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*.$

★ Son inverse $a \mapsto \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}$ est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \left\{ a \in \mathbb{R}^* \mid 1 - \frac{1}{a} \neq 0 \right\} &= \left\{ a \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{a} \neq 1 \right\} \\ &= \{ a \in \mathbb{R}^* \mid a \neq 1 \} \\ &= \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}. \end{aligned}$$

★ Par différence avec la fonction inverse, qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, la fonction g est donc définie sur :

$$\mathbb{R}^* \cap (\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}) = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}.$$

- Simplifions alors l'expression de la fonction g .

Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{a-1}{a}} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{a}{a-1} \\ &= \frac{(a-1) - a^2}{a(a-1)} \\ &= -\frac{a^2 - a + 1}{a(a-1)} \\ &= \boxed{\frac{a^2 - a + 1}{a(1-a)}}. \end{aligned}$$

- La fonction f , qui est l'inverse de la fonction g , est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}\{a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \mid g(a) \neq 0\} &= \left\{a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \mid \frac{a^2 - a + 1}{a(1 - a)} \neq 0\right\} \\ &= \{a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \mid a^2 - a + 1 \neq 0\}.\end{aligned}$$

Or le trinôme $a \mapsto a^2 - a + 1$ a pour discriminant $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$, donc il n'admet pas de racine réelle.

Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

- Enfin, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, on a :

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} \\ &= \frac{1}{g(a)} \\ &= \frac{1}{\frac{a^2 - a + 1}{a(1 - a)}} \\ &= \boxed{\frac{a(1 - a)}{a^2 - a + 1}}.\end{aligned}$$

3. • Trouvons le domaine de définition de la fonction $f: a \mapsto -\frac{4}{2 \times \frac{a}{3}} + \frac{7}{\frac{5}{3a}}$.

★ La fonction $a \mapsto 2 \times \frac{a}{3}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $a \mapsto -\frac{4}{2 \times \frac{a}{3}}$ est définie sur

$$\left\{a \in \mathbb{R} \mid 2 \times \frac{a}{3} \neq 0\right\} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}^*}.$$

★ La fonction $a \mapsto \frac{5}{3a}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Donc la fonction $a \mapsto \frac{7}{\frac{5}{3a}}$ est définie sur

$$\left\{a \in \mathbb{R}^* \mid \frac{5}{3a} \neq 0\right\} = \{a \in \mathbb{R}^* \mid 5 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}^*}.$$

Par somme, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

- Simplifions maintenant l'expression de f .

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \frac{4}{2 \times \frac{a}{3}} + \frac{7}{\frac{5}{3a}} \\
 &= 4 \times \frac{1}{\frac{2a}{3}} + 7 \times \frac{1}{\frac{5}{3a}} \\
 &= 4 \times \frac{3}{2a} + 7 \times \frac{3a}{5} \\
 &= \frac{6}{a} + \frac{21a}{5} \\
 &= \boxed{\frac{30 + 21a^2}{5a}}.
 \end{aligned}$$

4. • Donnons le domaine de définition de la fonction

$$f: (a, b) \mapsto \frac{a}{b} + \frac{a}{-b} - \frac{a}{b} + \frac{-a}{-b} - \frac{-a}{b} - \frac{-a}{-(-b)} + \left(-\frac{b}{a}\right)^{-1}.$$

★ La fonction $(a, b) \mapsto \frac{a}{b} + \frac{a}{-b} - \frac{a}{b} + \frac{-a}{-b} - \frac{-a}{b} - \frac{-a}{-(-b)}$ est définie sur

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*}.$$

★ La fonction $(a, b) \mapsto -\frac{b}{a}$ est définie sur

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}.$$

★ Son inverse $(a, b) \mapsto \left(-\frac{b}{a}\right)^{-1}$ est donc définie sur

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid b \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*}.$$

Finalement, par somme, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*}$.

- Simplifions à présent l'expression de f .

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(a, b) &= \frac{a}{b} + \frac{a}{-b} - \frac{a}{b} + \frac{-a}{-b} - \frac{-a}{b} - \frac{-a}{-(-b)} + \left(-\frac{b}{a}\right)^{-1} \\
 &= \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \\
 &= \boxed{\frac{a}{b}}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 — Résolutions d'équations

1. Appelons (E_1) l'équation

$$3(x + 5) + 2x = -5(3x + 2) - 7,$$

d'inconnue x réelle.

- Les fonctions $x \mapsto 3(x + 5) + 2x$ et $x \mapsto -5(3x + 2) - 7$ sont polynomiales, donc elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'équation (E_1) est définie sur $\mathbb{R}$.

- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} 3(x + 5) + 2x = -5(3x + 2) - 7 &\iff 3x + 15 + 2x = -15x - 10 - 7 \\ &\iff 5x + 15 = -15x - 17 \\ &\iff 20x = -32 \\ &\iff x = -\frac{32}{20} \\ &\iff x = -\frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $\left\{-\frac{8}{5}\right\}$.

2. Appelons (E_2) l'équation

$$7x^2 = 4x + 2,$$

d'inconnue x réelle.

- Les fonctions polynomiales $x \mapsto 7x^2$ et $x \mapsto 4x + 2$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'équation (E_2) est définie sur $\mathbb{R}$.

- Résolvons-la.

Pour tout x réel, on a l'équivalence suivante :

$$7x^2 = 4x + 2 \iff 7x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Le trinôme $x \mapsto 7x^2 - 4x - 2$ admet pour discriminant

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 7 \times (-2) = 4(4 + 14) = 4 \times 18 = 4 \times 9 \times 2 = (6\sqrt{2})^2,$$

donc pour racines

$$\frac{4 - 6\sqrt{2}}{14} = \frac{2 - 3\sqrt{2}}{7} \text{ et } \frac{4 + 6\sqrt{2}}{14} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{7}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est $\left\{\frac{2 - 3\sqrt{2}}{7}; \frac{2 + 3\sqrt{2}}{7}\right\}$.

3. Appelons (E_3) l'équation

$$\frac{2}{x+1} = -3,$$

d'inconnue x réelle.

- La fonction $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Ainsi, l'équation (E_3) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} = -3 &\iff 2 = -3(x+1) \\ &\iff 2 = -3x - 3 \\ &\iff 3x = -5 \\ &\iff x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Le nombre $-\frac{5}{3}$ appartient bien à $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

4. Appelons (E_4) l'équation

$$\frac{x+3}{x} = 5,$$

d'inconnue x réelle.

- La fonction $x \mapsto \frac{x+3}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, l'équation (E_4) est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} = 5 &\iff x+3 = 5x \\ &\iff 4x = 3 \\ &\iff x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Le nombre $\frac{3}{4}$ appartient bien à $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

5. Appelons (E_5) l'équation

$$x - 4 = x + 7,$$

d'inconnue x réelle.

- Les fonctions $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto x + 7$ sont polynomiales, donc définies sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'équation (E_5) est définie sur $\mathbb{R}$.
- Résolvons-la.

Pour tout x réel, on a l'équivalence suivante :

$$x - 4 = x + 7 \iff -4 = 7,$$

ce qui est faux.

Ainsi, l'équation (E_5) n'a pas de solution : son ensemble de solutions est $\emptyset$.

6. Appelons (E_6) l'équation

$$\frac{x+3}{x} = \frac{5+x}{x+2},$$

d'inconnue x réelle.

- Donnons le domaine de définition de l'équation (E_6) .
 ★ La fonction $x \mapsto \frac{x+3}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
 ★ La fonction $x \mapsto \frac{5+x}{x+2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ainsi, l'équation (E_6) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} = \frac{5+x}{x+2} &\iff (x+3)(x+2) = (5+x)x \\ &\iff x^2 + 2x + 3x + 6 = 5x + x^2 \\ &\iff x^2 + 5x + 6 = x^2 + 5x \\ &\iff 6 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est faux.

Ainsi, l'équation (E_6) n'a pas de solution : son ensemble de solutions est $\emptyset$.

7. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, appelons $(E_{a,b})$ l'équation

$$x^2 + ax + b = 0,$$

d'inconnue x réelle.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le trinôme $x \mapsto x^2 + ax + b$ est défini sur $\mathbb{R}$,

donc l'équation $(E_{a,b})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(a) **Cas où $a = -3$ et $b = -4$:**

Dans ce cas, le trinôme $x \mapsto x^2 + ax + b$ admet pour discriminant

$$\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times b = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2,$$

donc pour racines

$$\frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1 \text{ et } \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{-3,-4})$ est $\{-1; 4\}$.

(b) **Cas où $a = 2$ et $b = 1$:**

Dans ce cas, le trinôme $x \mapsto x^2 + ax + b$ admet pour discriminant

$$\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times b = 2^2 - 4 \times 1 = 4 - 4 = 0,$$

donc pour unique racine

$$\frac{-a}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $(E_{2,1})$ est $\{-1\}$.

Exercice 5 — Résolutions d'inéquations

1. Appelons (I_1) l'inéquation

$$(5 - 2x)^2 > (5 - 2x)(x - 2),$$

d'inconnue x réelle.

- Les fonctions $x \mapsto (5 - 2x)^2$ et $x \mapsto (5 - 2x)(x - 2)$ sont polynomiales, donc elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, l'inéquation (I_1) est définie sur $\mathbb{R}$.

- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} (5 - 2x)^2 > (5 - 2x)(x - 2) &\iff (5 - 2x)^2 - (5 - 2x)(x - 2) > 0 \\ &\iff (5 - 2x) [(5 - 2x) - (x - 2)] > 0 \\ &\iff (5 - 2x)(5 - 2x - x + 2) > 0 \\ &\iff (5 - 2x)(7 - 3x) > 0 \\ &\iff \begin{cases} 5 - 2x > 0 \\ 7 - 3x > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 7 - 3x < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x < \frac{7}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x > \frac{7}{3} \end{cases} \\ &\iff x < \frac{7}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2} \left(\text{car } \frac{5}{2} = \frac{15}{6} > \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est $]-\infty; \frac{7}{3}[\cup]\frac{5}{2}; +\infty[$.

2. Appelons (I_2) l'inéquation

$$\frac{x-2}{x-1} \leq \frac{x+3}{x+2},$$

d'inconnue x réelle.

- Donnons le domaine de définition de l'inéquation (I_2) .

★ La fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

★ La fonction $x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ainsi, l'inéquation (I_2) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

- Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-1} \leq \frac{x+3}{x+2} &\iff \frac{x-2}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} \leq 0 \\ &\iff \frac{(x-2)(x+2) - (x+3)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ &\iff \frac{(x^2-4) - (x^2-x+3x-3)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2-4-x^2-2x+3}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ &\iff \frac{-2x-1}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ &\iff \boxed{\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} \geq 0} \text{ car la multiplication par } -1 \text{ est décroissante} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \leq 0 \\ (x-1)(x+2) \leq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \geq 0 \\ (x-1)(x+2) \geq 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \leq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \leq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 1 \\ x \leq -2 \end{array} \right. \\ &\iff x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \text{ ou } x \in \emptyset \text{ ou } x \in [1; +\infty[\text{ ou } x \in \emptyset \\ &\iff x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[. \end{aligned}$$

Or $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, donc on obtient l'équivalence suivante :

$$\frac{x-2}{x-1} \leq \frac{x+3}{x+2} \iff x \in \left] -2; -\frac{1}{2} \right] \cup]1; +\infty[.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) est $\left] -2; -\frac{1}{2} \right] \cup]1; +\infty[.$

Du calcul avec de vraies erreurs

Exercice 6 — Où est l'erreur de Charlie ?

1.

Pour tout réel x strictement positif

$$\begin{aligned} e^{3 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} &= e^{-3 \ln(x^2)} \\ &= e^{-6 \ln(x)} \\ &= -6e^{\ln(x)} \\ &= -6x. \end{aligned}$$

(a) La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc pour tout x strictement positif, $\boxed{e^{3 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} > 0}$.

Mais pour tout x strictement positif, $\boxed{-6x < 0}$, donc

$$e^{3 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} \neq -6x.$$

- (b)
- Charlie a fait une erreur en passant de la deuxième à la troisième ligne.
 - Voici la version corrigée du calcul.

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} e^{3 \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} &= e^{-3 \ln(x^2)} \\ &= e^{-3 \times 2 \ln(x)} \\ &= e^{-6 \ln(x)} \\ &= \left(e^{\ln(x)}\right)^{-6} \\ &= x^{-6} \\ &= \boxed{\frac{1}{x^6}}. \end{aligned}$$

2.

Pour tout a réel, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} &= \frac{8a}{6} - \frac{a}{6} - \frac{4 - 4a + a - a^2}{6} \\
 &= \frac{8a - a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6} \\
 &= \frac{7a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6} \\
 &= \frac{7a + a^2 - 3a + 4}{6} \\
 &= \frac{a^2 + 4a + 4}{6} \\
 &= \frac{(a+2)^2}{6}.
 \end{aligned}$$

(a) Lorsque $a = 0$, on a : d'une part,

$$\frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} = 0 - 0 - \frac{4 \times 1}{6} = -\frac{2}{3},$$

et d'autre part,

$$\frac{(a+2)^2}{6} = \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3},$$

donc

$$\frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} \neq \frac{(a+2)^2}{6}.$$

Ainsi, [la formule obtenue par Charlie n'est pas valable pour $a = 0$].

- (b) • En distribuant la multiplication par -1 sur la parenthèse de la troisième ligne, Charlie a fait une erreur de signe.
 • Voici la version corrigée du calcul.

Soit a un réel. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} &= \frac{8a}{6} - \frac{a}{6} - \frac{4 - 4a + a - a^2}{6} \\
 &= \frac{8a - a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6} \\
 &= \frac{7a}{6} - \frac{-a^2 - 3a + 4}{6},
 \end{aligned}$$

donc en distribuant (correctement), on obtient que

$$\begin{aligned}
 \frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} &= \frac{7a + a^2 + 3a - 4}{6} \\
 &= \boxed{\frac{a^2 + 10a - 4}{6}}.
 \end{aligned}$$

Pour obtenir, comme dans le calcul de Charlie, le résultat sous forme factorisée, on peut mettre le trinôme du numérateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \frac{4a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{(4+a)(1-a)}{6} &= \frac{(a^2 + 10a + 25) - 25 - 4}{6} \\ &= \frac{(a+5)^2 - 29}{6} \\ &= \frac{(a+5-\sqrt{29})(a+5+\sqrt{29})}{6}, \end{aligned}$$

par identité remarquable.

3.

Pour tout x réel, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \cos(2x) = 1 - \sin^2(x) &\iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 - \sin^2(x) \\ &\iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 - [-\cos^2(x) + 1] \\ &\iff 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) + 2 \\ &\iff \cos^2(x) = 3 \\ &\iff \cos(x) = \sqrt{3} \text{ ou } \cos(x) = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On la fonction cosinus sur $[-1; 1]$, donc l'équation $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$, d'inconnue x réelle, n'a pas de solution.

- (a) • Comme $3 > 1$, la stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ assure que $\sqrt{3} > 1$.

Il s'ensuit également que $-\sqrt{3} < -1$.

Or la fonction cosinus est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$,

donc l'équation $\cos(x) = \sqrt{3}$ ou $\cos(x) = -\sqrt{3}$ n'admet pas de solution.

- Mais comme on a :

$$\begin{cases} \cos(2 \times 0) = \cos(0) = 1 \\ 1 - \sin^2(0) = 1 - 0^2 = 1, \end{cases}$$

l'équation $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$ admet 0 pour solution évidente.

Ainsi, l'équivalence obtenue par Charlie n'est pas vraie pour tout x réel.

- (b) • En distribuant la multiplication par -1 sur le crochet de la première ligne, Charlie a encore fait une erreur de signe.
- Voici la version corrigée du raisonnement.

Pour tout x réel, on a l'équivalence suivante :

$$\cos(2x) = 1 - \sin^2(x) \iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 - [-\cos^2(x) + 1],$$

d'après la super formule de trigo.

En distribuant (correctement), on obtient alors que pour tout x réel, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \cos(2x) = 1 - \sin^2(x) &\iff 2\cos^2(x) - 1 = 1 + \cos^2(x) - 1 \\ &\iff 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) \\ &\iff 1 - \cos^2(x) = 0 \\ &\iff \sin^2(x) = 0 \text{ d'après la super formule de trigo} \\ &\iff \sin(x) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$, d'inconnue x réelle, est l'ensemble suivant :

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.

Soit R un réel non nul. Soit x un réel tel que $\frac{R}{x} + \frac{8x}{R} \neq 0$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} &\iff \frac{R}{3x} = \frac{1}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} \\ &\iff \frac{3x}{R} = \frac{x}{R} + \frac{R}{8x} \\ &\iff \frac{2x}{R} = \frac{R}{8x} \\ &\iff 16x^2 = R^2 \\ &\iff x^2 = \frac{R^2}{16} \\ &\iff x = -\frac{R}{4} \text{ ou } x = \frac{R}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble de

$$\frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} \text{ est } \left\{ -\frac{R}{4}; \frac{R}{4} \right\}.$$

(a) Pour vérifier le calcul de Charlie, on peut réinjecter $\frac{R}{4}$ dans l'équation de départ :

d'une part,

$$\frac{\frac{R}{\frac{R}{4}}}{\frac{R}{4}} = R \times \frac{4}{R} = 4,$$

et d'autre part,

$$\frac{3}{\frac{R}{\frac{R}{4}} + \frac{8 \times \frac{R}{4}}{R}} = \frac{3}{4 + \frac{2R}{R}} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{8},$$

donc $\frac{R}{4}$ n'est pas solution de l'équation $\frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}}$, d'inconnue x réelle.

- (b)
- En passant à l'inverse, de la première à la deuxième ligne, Charlie fait une erreur : dans le membre de droite, l'inverse de la somme est remplacée par la somme des inverses, qui n'est ni égale au membre de droite de la première ligne, ni à son inverse !
 - Voici la version corrigée du raisonnement.

Soit R un réel non nul.

Soit x un réel non nul tel que $\frac{R}{x} + \frac{8x}{R} \neq 0$ (c'est-à-dire un réel x appartenant au domaine de définition de l'équation).

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} &\iff \frac{R}{3x} = \frac{1}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}} \\ &\iff \frac{R}{3x} = \frac{1}{\frac{Rx + 8x^2}{R}} \\ &\iff \frac{3x}{R} = \frac{Rx}{Rx + 8x^2} \text{ par passage à l'inverse} \\ &\iff 3x = \frac{Rx}{x} \\ &\iff 3x^2 = R^2 + 8x^2 \\ &\iff 5x^2 = -R^2. \end{aligned}$$

Or x et R sont non nuls, donc leurs carrés sont strictement positifs, donc l'égalité $5x^2 = -R^2$ est fausse ($5x^2 > 0$ mais $-R^2 < 0$).

Ainsi, l'équation $\frac{R}{x} = \frac{3}{\frac{R}{x} + \frac{8x}{R}}$, d'inconnue x réelle, n'admet pas de solution : son ensemble de solutions est vide.

Exercice 7 — Analyse d'un résultat